

Valeur absolue d'un nombre

I. Cours

Définition :

Soit x un nombre réel. On appelle valeur absolue de x , notée $|x|$, le nombre **positif ou nul** tel que :

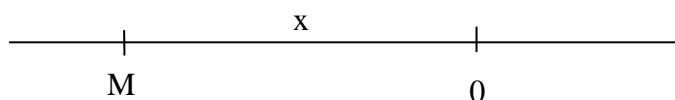
$$|x| = x \quad \text{si } x \geq 0$$

$$|x| = -x \quad \text{si } x \leq 0$$

Exemples : $|20| = 20$
 $|-3| = 3$
 $|1-\pi| = \pi-1$ car $1-\pi < 0$

Interprétation graphique de la valeur absolue :

Soit M le point image de x . On a $|x| = OM$.



Propriétés :

Pour tout x réel, on a :

$$|x| \geq 0$$

$$|x| = |-x|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2} = |x|$$

Valeur absolue d'un produit : $|xy| = |x||y|$

Valeur absolue d'un quotient : $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

☛ Valeur absolue d'une somme : elle n'est en général pas égal à la somme des valeurs absolues.

En revanche, on a toujours : $|x+y| \leq |x| + |y|$

Equations et inéquations avec des valeurs absolues :

⇒ $|x| = a$ équivaut à $x = a$ ou $x = -a$ suivant le signe de x

⇒ $|x| \leq a$ équivaut à $-a \leq x \leq a$

⇒ $|x| > a$ équivaut à $x < -a$ ou $x > a$

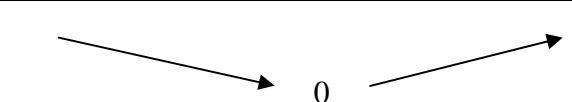
La fonction valeur absolue :

Soit f telle que $f(x) = |x|$

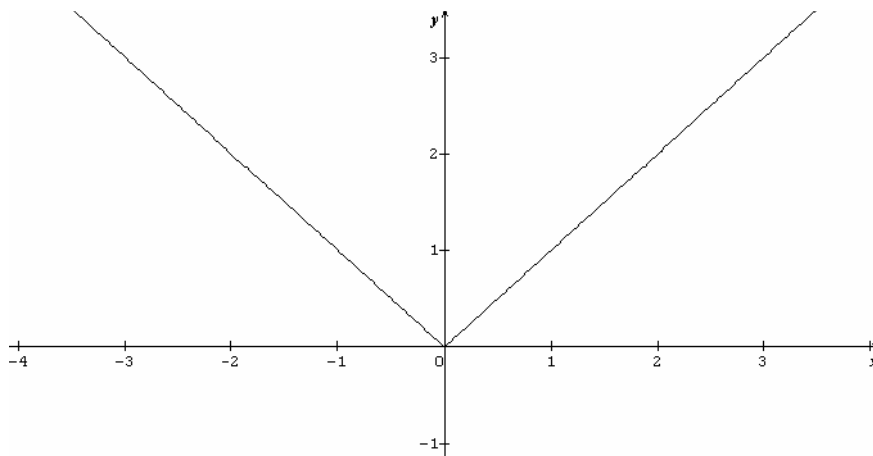
On a $f(x) = x$ si $x \geq 0$

et $f(x) = -x$ si $x \leq 0$

f est donc une fonction affine, et peut représenter son tableau de variation :

x	$-\infty$	0	∞
$ x $			

Représentation graphique de la fonction valeur absolue :



II. Exercices

Résoudre :

Essayez de résoudre sans regarder les solutions qui se trouvent page suivante. Donner les solutions sous forme d'intervalles.

1. $|-x| \leq 3$

2. $|2x+7| \leq 21$

3. $|3x| > 7$

4. $3 \leq |x-1| \leq 9$

Solutions :

$$\begin{aligned} 1. \quad & |-x| \leq 3 \\ & |x| \leq 3 \\ & -3 \leq x \leq 3 \\ \text{Donc } S_1 &= [-3; 3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & |2x+7| \leq 21 \\ & -21 \leq 2x+7 \leq 21 \\ & -28 \leq 2x \leq 14 \\ & -14 \leq x \leq 7 \\ S_2 &= [-14; 7] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & |3x| > 7 \\ & 3x < -7 \quad \text{ou} \quad 3x > 7 \\ & x < -\frac{7}{3} \quad \text{ou} \quad x > \frac{7}{3} \\ S_3 &=]-\infty; -\frac{7}{3}[\cup]\frac{7}{3}; +\infty[\end{aligned}$$

$$4. \quad 3 \leq |x-1| \leq 9$$

Il faut résoudre deux inéquations : $3 \leq |x-1|$ (a) et $|x-1| \leq 9$ (b)

$$\begin{aligned} & |x-1| \geq 3 \\ (a) \quad & x-1 \leq -3 \quad \text{ou} \quad x-1 \geq 3 \\ & x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 4 \\ S_a &=]-\infty; -2] \cup [4; +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |x-1| \leq 9 \\ (b) \quad & -9 \leq x-1 \leq 9 \\ & -8 \leq x \leq 10 \\ S_b &= [-8; 10] \end{aligned}$$

La solution de 4 doit vérifier les solutions de (a) et de (b) : $S_4 = S_a \cap S_b = [-8; -2] \cup [4; 10]$